ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A4

1. Λ
2. Λ
3. Σ
4. Σ
5. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1 ΛΥΜΕΝΟ Π.Χ. ΣΕΛ. 25 / Π.Χ 9

B2

① $f'(x) = e^x(x^2-x-1) + e^x(2x-1) = e^x(x^2-x-1+2x-1)$
$= e^x(x^2+x-2)$

② $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x}\cdot x}$

③ $f'(x) = \dfrac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

B3 ΛΥΜΕΝΟ Π.Χ. ΣΕΛ. / Π.Χ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $A_{f\circ g} = \{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\} = \{x\neq 1 \,/\, \frac{x}{1-x} > 0\}$

• $\frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0$

		0		1	
	−		+		−

άρα $A_{f\circ g} = (0,1)$ με $f(g(x)) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

$\boxed{\Gamma 2}$ $h(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$

▶ Έστω $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα h "1-1"

▶ Θέτουμε $h(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=\ln e^y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=(1-x)e^y \Leftrightarrow x=e^y - xe^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+xe^y=e^y \Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}$$

Επίσης $0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{e^y}{1+e^y} \le 1$ ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$

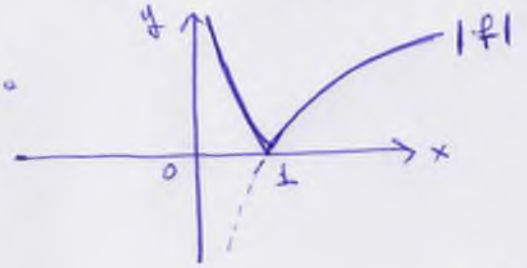
άρα $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$

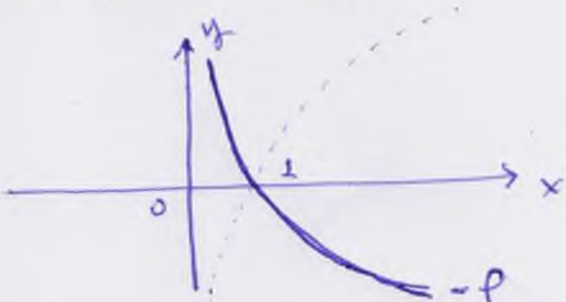
$\boxed{\Gamma 3}$ $\varphi(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

• $\varphi'(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x+\cancel{e^{2x}}-\cancel{e^{2x}}}{(1+e^x)^2}>0$

$\boxed{\Gamma 4}$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{0}{1+0}=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{1+u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{u}=1$

• 



ΘΕΜΑ Δ

Δ1 πχ 21 / σελ 86 $f(1)=3$ κ' $f(2)=1$

Δ2 Εφόσον f γν. μονότονη κ' $\underset{3}{\underset{\shortparallel}{f(1)}} > \underset{1}{\underset{\shortparallel}{f(2)}}$

τότε $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$

Δ3 $f(f(|x|-1)-x) < f(3-x)$

$\overset{f\downarrow}{\iff} f(|x|-1)-x > 3-x \iff f(|x|-1) > 3$

$\iff f(|x|-1) > f(1) \overset{f\downarrow}{\iff} |x|-1 < 1 \iff |x|<2$

$\iff -2<x<2$

Δ4 (i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$

- $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow g(g(x_1)) = g(g(x_2))$ (1)
- $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) = -g(x_2)$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow g(g(x_1)) - g(x_1) = g(g(x_2)) - g(x_2) \iff$

$\iff f(x_1^3+1) - 3 = f(x_2^3+1) - 3 \iff f(x_1^3+1) = f(x_2^3+1) \overset{f \text{ "1-1"}}{\iff}$

$\iff x_1^3+1 = x_2^3+1 \iff x_1^3 = x_2^3 \iff x_1 = x_2$

άρα g "1-1"

(ΙΙ) Για $x=0$: $g(g(0)) = g(0) + f(1) - 3$

$\Leftrightarrow g(g(0)) = g(0) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(0) = 0$

- $g(f(x)-3) - g((x-1)^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(f(x)-3) = g(x-1)^2 \overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} f(x)-3 = (x-1)^2$

Προφανής ρίζα: $x_0 = 1$

Έστω ότι υπάρχει ρίζα της εξίσωσης ρ με $\rho > 1$

- $\rho > 1 \overset{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(\rho) < f(1) \Leftrightarrow f(\rho) < 3 \Leftrightarrow f(\rho) - 3 < 0$

- $f(x) - 3 = (x-1)^2$ για $x = \rho$: $\underbrace{f(\rho)-3}_{(-)} = \underbrace{(\rho-1)^2}_{(+)}$

Άτοπο αφού $f(\rho) - 3 < 0$ κ' $(\rho-1)^2 > 0 \ \forall \rho > 1$

Άρα ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ $x_0 = 1$, $\forall x \geq 1$